PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 1 (1956)

NEKE FORMULE KOJE SE ODNOSE NA LEGENDRE-OVE POLINOME

Dragoslav S. Mitrinović

U ovom članku izvedene su nekolike formule iz teorije LEGENDRE-ovih polinoma i, polazeći od ovih rezultata, pokazano je kako se mogu dobiti neki interesantni identiteti.

1. Predmet ovog članka je, između ostalog, izračunavanje integrala

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx, \tag{1}$$

gde su m, n, r, s prirodni brojevi ($r \leqslant m$, $n \leqslant s$), a $P_\nu(x)$, $(\nu = m, n)$, *Legendre*-ovi polinomi čija je definicija, u *Rodrigues*-ovom obliku,

$$P_\nu(x) \equiv \frac{1}{\nu!\, 2^\nu} \frac{d^\nu}{dx^\nu} (x^2 - 1)^\nu, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Određeni integral (1) može se izračunati na dva načina: kao polazna tačka može se uzeti ili *Rodrigues*-ova formula (2) ili formule:

$$\frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \equiv \tag{3}$$

$$\sum_{\nu=1}^{M} \left\{ \binom{\nu + r - 2}{r - 1} (2m - 4\nu - 2r + 5)\, P_{m-2\nu-r+2} \prod_{\lambda=2}^{r} (2m - 2\nu - 2\lambda + 5) \right\}$$

gde je

$$M \equiv \begin{cases} \dfrac{m-r}{2} + 1, & \text{ako je } m - r \text{ parno,} \\[2mm] \dfrac{m-r-1}{2} + 1, & \text{ako je } m - r \text{ neparno;} \end{cases}$$

(4)
$$\frac{d^s}{dx^s} P_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{N} \left\{ \binom{k+s-2}{s-1} (2n-4k-2s+5) P_{n-2k-s+2} \prod_{\mu=2}^{s} (2n-2k-2\mu+5) \right\}$$

gde je
$$N \equiv \begin{cases} \dfrac{n-s}{2}+1, & \text{ako je } n-s \text{ parno,} \\[2mm] \dfrac{n-s-1}{2}+1, & \text{ako je } n-s \text{ neparno.} \end{cases}$$

Formulu (3), odnosno formulu (4), izveli smo polazeći od poznate formule {videti, na primer, [**1**], str. 10}

(5)
$$\frac{d}{dx} P_m(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu \leqslant \frac{m-1}{2}} (2m-4\nu-1) P_{m-2\nu-1},$$

koristeći pri tome metodu potpune indukcije.

Međutim, pregledajući kasnije literaturu o *Legendre*-ovim polinomima, naišli smo na belešku u *Hobson*-ovom delu {videti [**2**], str. 35} iz koje se vidi da je *F. Neumann* [**3**][1]) izveo ne samo formulu (5), već takođe i formulu (3). *Hobson* daje samo definitivni *Neumann*-ov rezultat, koji se unekoliko razlikuje od oblika (3) koji smo mi dobili. Primetimo da je naš oblik savršeniji po formi od *Neumann*-ovog.

Posle *Neumann*-a, *G. Palamà* {[**17**], § 9} je izveo jednu formulu za $d^r P_n / dx^r$. Međutim, oblik te formule je veoma komplikovan i stoga nepodesan za primenu. Uostalom, ni sâm *Palamà* nije koristio, u citiranom radu, formulu o kojoj je reč, već se zadovoljio time što ju je samo naveo. Izgleda da *Palamà* nije znao za *Neumann*-ov rezultat, budući da ga ne navodi. Evo ove formule:

$$d^r P_n / dx^r \equiv \sum_{i_1=1}^{\sigma_1} \sum_{i_2=1}^{\sigma_2} \cdots \sum_{i_r=1}^{\sigma_r} \{(2n-4i+3)(2n-4i_1-4i_2+5)\ldots$$
$$\times (2n-4i_1-\ldots-4i_r+2r+1) P_{n-2i_1-\ldots-2i_r+r}\},$$

gde $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ imaju vrednosti

$$\sigma_1 = \left[\frac{n+1}{2}\right], \; \sigma_2 = \left[\frac{n-2i_1+2}{2}\right], \ldots, \; \sigma_r = \left[\frac{n-2i_1-\ldots-2i_{r-1}+r}{2}\right].$$

---

[1]) Kad je ovaj članak već bio u štampi, njegov pisac je dobio iz Narodne biblioteke u Lajpcigu *Neumann*-ovu studiju [**3**] u kojoj su na str. 62—63 navedene bez dokaza formule (3) i (4), ali ne u kondenzovanom obliku kako je to ovde učinjeno. *Neumann*-ove formule uneo je *Hobson* u svoju monografiju [**2**]. On takođe nije dao dokaz ovih formula. Prema tome, dokaz formula (3) i (4) dosada nije objavljen, koliko je piscu poznato, već samo konstatacija da je formula dokazana (ranije je to učinio *Neumann* i sada nezavisno od njega pisac ovog članka).

$[\tau]$ označava najveći ceo broj koji nije veći od τ.

2. Na osnovu formula (3) i (4), proizvod $\frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)$ može se izraziti kao linearna homogena kompozicija proizvoda oblika

$$P_p(x) \cdot P_q(x).$$

Vodeći računa o dobro poznatoj osobini *Legendre*-ovih polinoma:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \cdot P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n, \end{cases} \tag{6}$$

dolazi se do sledećeg zaključka.

Ako je $m-r$ parno i $n-s$ neparno, tada, s obzirom na (3), (4) i (6), izlazi da je integral (1) jednak nuli.

Ako je $m-r$ neparno i $n-s$ parno, i tada je ovaj integral jednak nuli.

Ova dva zaključka mogu se sažeti u jedan jedini koji glasi:

Ako je $(m-r)-(n-s)$ neparno, tada je

$$J \equiv \int_{-1}^{+1} \frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx = 0\,.$$

Možemo ovo iskazati i na sledeći način:

Ako su izrazi $m-r$ i $n-s$ različite parnosti, tada je $J=0$.

3. Ako su brojevi $m-r$ i $n-s$ bilo obadva parna, bilo obadva neparna, ili kraće kazano, ako je razlika

$$(m-r)-(n-s)$$

paran broj, integral (1) može se izračunati postupkom koji će niže biti izložen.

Da bismo našli članove oblika

$$A\,\{P_p(x)\}^2, \qquad (A \text{ funkcija od } m,\ n,\ r,\ s),$$

koji se dobijaju pri množenju izraza (3) i (4), s obzirom na strukturu ovih izraza, nameće nam se da razlikujemo slučajeve:

$$1^\circ \quad m-r \geqslant n-s;$$
$$2^\circ \quad m-r \leqslant n-s.$$

Dovoljno je da se u daljem izlaganju zadržimo samo na jednom od ovih slučajeva, naime uzećemo slučaj 1°.

Prvi član oblika $A\,\{P_p(x)\}^2$ dobićemo polazeći od uslova

$$n-s = m-2\nu-r+2,$$

odakle je

$$\nu = \frac{(m-r)-(n-s)}{2} + 1,$$

a to je prirodan broj s obzirom na učinjene pretpostavke o parametrima m, n, r, s.

Da bismo izračunali integral (1), dovoljno je uzeti, umesto (3), izraz

$$\sum_{\nu=L}^{M}\left\{\binom{\nu+r-2}{r-1}(2m-4\nu-2r+5)\,P_{m-2\nu-r+2}\prod_{\lambda=2}^{r}(2m-2\nu-2\lambda+5)\right\}, \tag{7}$$

gde je

$$L=\frac{(m-r)-(n-s)}{2}+1.$$

Ako se stavi

$$\nu-\frac{(m-r)-(n-s)}{2}=k,$$

tada (7) dobija oblik

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\binom{\frac{1}{2}(\overline{m-r}-\overline{n-s})+k+r-2}{r-1}(2n-2s-4k+5)\,P_{n-s-2k+2}\right.$$
$$\left.\times\prod_{\lambda=2}^{r}(m+r+n-s-2k-2\lambda+5)\right\}. \tag{8}$$

N ima ranije definisani oblik [videti kod formule (4)].

Polazeći od izraza (4) i (8), dolazi se do tražene formule

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d^r}{dx^r}P_m(x)\cdot\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\,dx= \tag{9}$$

$$2\sum_{k=1}^{N}\left\{\binom{k+s-2}{s-1}\binom{\frac{1}{2}(\overline{m-r}-\overline{n-s})+k+r-2}{r-1}(2n-4k-2s+5)\right.$$
$$\left.\times\prod_{\lambda=2}^{r}(m+n+r-s-2k-2\lambda+5)\prod_{\mu=2}^{s}(2n-2k-2\mu+5)\right\},$$

gde N, m, n, r, s zadovoljavaju uslove:

$$N=\begin{cases}\dfrac{n-s}{2}+1, & n-s \text{ parno},\\[2mm] \dfrac{n-s-1}{2}+1, & n-s \text{ neparno};\end{cases}$$

$$r\geqslant 2,\ s\geqslant 2,\ m-r\geqslant n-s;$$

$$\overline{m-r}-\overline{n-s}\ \text{parno}.$$

4. Posmatrajmo sada one slučajeve integrala (1) koji nisu obuhvaćeni formulom (9), tj.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \cdot \frac{d}{dx} P_n(x)\, dx, \quad \int_{-1}^{+1} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx} P_m(x) \cdot \frac{d}{dx} P_n(x)\, dx, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx,$$

$$(s \geqslant 2).$$

Treći od tih integrala sreće se u literaturi {videti: [4], str. 282 i [5], str. 309} i njegova je vrednost

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx} P_m(x) \cdot \frac{d}{dx} P_n(x)\, dx \equiv \begin{cases} n(n+1), & m \geqslant n, \quad m-n \text{ parno;} \\ 0, & m \geqslant n, \quad m-n \text{ neparno;} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx} P_m(x) \cdot \frac{d}{dx} P_n(x)\, dx \equiv \begin{cases} m(m+1), & m \leqslant n, \quad n-m \text{ parno;} \\ 0, & m \leqslant n, \quad n-m \text{ neparno.} \end{cases}$$

Da bismo izračunali integral

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx,$$

koristićemo formulu (4).

Ako je $m \leqslant n-s$ i $(n-s)-m$ parno, tada je

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx$$

$$\equiv (2m+1) \binom{\frac{1}{2}(n-s-m)+s-1}{s-1} \prod_{\mu=2}^{s} (n+m+s-2\mu+3) \int_{-1}^{+1} [P_m(x)]^2\, dx$$

$$\equiv 2 \binom{\frac{1}{2}(n-s-m)+s-1}{s-1} \prod_{\mu=2}^{s} (n+m+s-2\mu+3).$$

Ako je $m > n-s$ ili ako je $m \leqslant n-s$ i $n-s-m$ neparno, tada je

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx = 0.$$

Da bismo izračunali integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx,$$

uzećemo u pomoć formule (4) i (5).

Formulu (5) napisaćemo u obliku

$$\frac{d}{dx} P_m(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{M} (2m - 4\nu + 3) P_{m-2\nu+1},$$

gde je

$$M = \begin{cases} \dfrac{m-1}{2} + 1. & \text{ako je } m-1 \text{ parno,} \\[2mm] \dfrac{m}{2}, & \text{ako je } m-1 \text{ neparno.} \end{cases}$$

Ako je $(m-1)-(n-s)$ neparan broj, tada integral ima vrednost nule. Primenom postupka koji smo upotrebili za dobijanje formule (9), a koji ovde nećemo ponavljati, dolazimo do formule

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx \equiv$$

$$2 \sum_{k=1}^{N} \left\{ (2n - 2s - 4k + 5) \binom{k+s-2}{s-1} \prod_{\mu=2}^{s} (2n - 2k - 2\mu + 5) \right\},$$

gde prirodni brojevi N, m, n, s zadovoljavaju uslove:

$$s \geqslant 2, \quad m-1 \geqslant n-s, \quad (m-1)-(n-s) \text{ parno,}$$

$$N = \begin{cases} \dfrac{n-s}{2} + 1, & \text{ako je } n-s \text{ parno,} \\[2mm] \dfrac{n-s-1}{2} + 1, & \text{ako je } n-s \text{ neparno.} \end{cases}$$

Ako je pak

$$s \geqslant 2, \quad n-s \geqslant m-1, \quad (n-s)-(m-1) \text{ parno,}$$

i ako N ima gore navedeno značenje, tada je

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx \equiv$$

$$2 \sum_{p=1}^{M} \left\{ \binom{\frac{1}{2}(\overline{n-s} - \overline{m-1}) + p + s - 2}{s-1} (2m - 4p + 3) \prod_{\mu=2}^{s} (m + n + s - 2p - 2\mu + 4) \right\},$$

gde je

$$M = \begin{cases} \dfrac{m-1}{2} + 1, & \text{za } m-1 \text{ parno:} \\[2mm] \dfrac{m}{2}, & \text{za } m-1 \text{ neparno.} \end{cases}$$

Na kraju navedimo i ovu formulu:

$$\int_{-1}^{+1} P_m'(x) \cdot \frac{d}{dx} P_n(x)\, dx \equiv \begin{cases} 2, & m \leqslant n-1, \ n-m \text{ neparno;} \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

5. Ako je $m = n$, formula (9) postaje

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^r}{dx^r} P_n(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx \equiv \tag{10}$$

$$2\sum_{k=1}^{N} \left\{ \binom{k+s-2}{s-1} \binom{\frac{1}{2}(s-r)+k+r-2}{r-1} (2n-4k-2s+5) \right.$$

$$\left. \times \prod_{\lambda=2}^{r} (2n+r-s-2k-2\lambda+5) \prod_{\mu=2}^{s} (2n-2k-2\mu+5) \right\},$$

uz uslove

$$r \geqslant 2, \ s \geqslant 2, \ s \geqslant r, \ s-r \text{ parno;}$$

N ima ranije definisan oblik — videti formulu (4).

Ako je osim navedenih uslova ispunjen i uslov $r = s$, tada formula (10) dobija jednostavniji oblik

$$\int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{d^s}{dx^s} P_n(x) \right\}^2 dx \equiv \tag{11}$$

$$2\sum_{k=1}^{N} \left\{ \binom{k+s-2}{s-1}^2 (2n-4k-2s+5) \prod_{\lambda=2}^{s} (2n-2k-2\lambda+5)^2 \right\},$$

gde je $s \geqslant 2$ i gde N ima napred dati oblik.

Za $r = s = 2$ formula (9) obuhvata, kao partikularni slučaj, poznati rezultat {videti: [5], str. 309 ili [4], str. 308}:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^2}{dx^2} P_m(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) dx \equiv \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)[3m(m+1)-n(n+1)+6],$$

pod uslovom da prirodni brojevi m i n zadovoljavaju uslove:

$$m \geqslant n, \ m-n \text{ paran broj.}$$

Stavimo li u (9) $r = s = 2$, dobijamo

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^2}{dx^2} P_m(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} P_n(x)\, dx \equiv \tag{12}$$

$$2\sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{m-n}{2} + k \right) (2n-4k+1)(m+n-2k+1)(2n-2k+1),$$

gde je

$$N=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{za } n \text{ parno,}\\[2mm] \dfrac{n-1}{2}, & \text{za } n \text{ neparno.}\end{cases}$$

Ako su m i n parni brojevi, tj. $m=2\mu$, $n=2\nu$, tada zbir koji se javlja u relaciji (12) dobija oblik

$$2\sum_{k=1}^{\nu} k(\mu-\nu+k)(4\nu-4k+1)(2\mu+2\nu-2k+1)(4\nu-2k+1).$$

Sumirajmo najpre izraz ($p\leqslant\nu$)

$$E(\mu,\nu,p)\equiv\sum_{k=1}^{p} k(\mu-\nu+k)(4\nu-4k+1)(2\mu+2\nu-2k+1)(4\nu-2k+1).$$

Posle izvršenih transformacija dobija se

$$\begin{aligned}E(\mu,\nu,p)\equiv\ &(2\mu+2\nu+1)(4\nu+1)^2(\mu-\nu)\sum_{k=1}^{p}k\\ &-(4\nu+1)[6\mu(2\mu+1)-14\nu(2\nu+1)-1]\sum_{k=1}^{p}k^2\\ &+8(\mu+3\nu+1)(2\mu-6\nu-1)\sum_{k=1}^{p}k^3\\ &+20(4\nu+1)\sum_{k=1}^{p}k^4\\ &-16\sum_{k=1}^{p}k^5.\end{aligned}$$

Ako se upotrebe formule

$$\sum_{k=1}^{p}k\equiv\frac{1}{2}p(p+1),\qquad \sum_{k=1}^{p}k^2\equiv\frac{1}{6}p(p+1)(2p+1),$$

$$(13)\qquad \sum_{k=1}^{p}k^3\equiv\frac{1}{4}p^2(p+1)^2,\qquad \sum_{k=1}^{p}k^4\equiv\frac{1}{30}p(p+1)(2p+1)(3p^2+3p-1),$$

$$\sum_{k=1}^{p}k^5\equiv\frac{1}{12}p^2(p+1)^2(2p^2+2p-1),$$

tada, posle izvršenih transformacija, dobijamo ($\mu\geqslant\nu$)

$$
(14) \qquad \begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} \frac{d^2}{dx^2} P_{2\mu}(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} P_{2\nu}(x)\, dx \equiv 2E(\mu, \nu, \nu) \\
&\equiv \frac{1}{3} \nu(\nu+1)(2\nu-1)(2\nu+1)\,[3\mu(2\mu+1) - \nu(2\nu+1)+3].
\end{aligned}
$$

Poslednja formula je u saglasnosti sa sledećim poznatim rezultatom {videti na primer [4], str. 308}

$$
(15) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{d^2}{dx^2} P_m(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} P_n(x)\, dx \equiv
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{(n+2)!}{4!\,(n-2)!}\,[3m(m+1) - n(n+1)+6], & m \geqslant n, \ m-n \ \text{parno}; \\[2mm]
\dfrac{(m+2)!}{4!\,(m-2)!}\,[3n(n+1) - m(m+1)+6], & m \leqslant n, \ n-m \ \text{parno}; \\[2mm]
0, \ \text{u ostalim slučajevima}.
\end{cases}
$$

Da bismo se u ovo uverili, dovoljno je ovde staviti $m = 2\mu$, $n = 2\nu$. Ako su m i n neparni brojevi, naime: $m = 2\mu+1$, $n = 2\nu+1$, tada zbir koji se javlja u (12) postaje

$$
2 \sum_{k=1}^{\nu} k(\mu - \nu + k)(4\nu - 4k+3)(2\mu + 2\nu - 2k+3)(4\nu - 2k+3).
$$

Sumiranje tog izraza može se izvršiti na napred navedeni način. Sumirajmo najpre izraz ($p \leqslant \nu$)

$$
F(\mu, \nu, p) \equiv \sum_{k=1}^{p} k(\mu - \nu + k)(4\nu - 4k+3)(2\mu + 2\nu - 2k+3)(4\nu - 2k+3).
$$

Kada se izvrše neke elementarne transformacije, dobija se:

$$
\begin{aligned}
F(\mu, \nu, p) \equiv\ & (\mu - \nu)(4\nu+3)^2 (2\mu + 2\nu+3) \sum_{k=1}^{p} k \\
& - (4\nu+3)\,[6\mu(2\mu+3) - 14\nu(2\nu+3) - 9] \sum_{k=1}^{p} k^2 \\
& + 8(\mu+3\nu+3)(2\mu - 6\nu - 3) \sum_{k=1}^{p} k^3 \\
& + 20(4\nu+3) \sum_{k=1}^{p} k^4 \\
& - 16 \sum_{k=1}^{p} k^5.
\end{aligned}
$$

Uzimajući u obzir formule (13), posle izvršenih transformacija, dolazi se do formule ($\mu \geqslant \nu$)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^2}{dx^2} P_{2\mu+1}(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} P_{2\nu+1}(x)\, dx \equiv 2F(\mu, \nu, \nu) \tag{16}$$

$$\equiv \frac{1}{3} \nu(\nu+1)(2\nu+1)(2\nu+3)[3\mu(2\mu+3) - \nu(2\nu+3)+5].$$

Dobijeni rezultat je u skladu sa formulom (15), u što se uveravamo ako u (15) stavimo

$$m = 2\mu + 1, \quad n = 2\nu + 1.$$

Prema tome, formule (14) i (16) mogu se skupiti u jedinstvenu formulu (15).

6. Izračunaćemo sada integral (1) na drugi način.

Na osnovu *Rodrigues*-ove formule (2) možemo pisati:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx \equiv \frac{1}{2^{m+n} m!\, n!} \int_{-1}^{+1} D^{m+r} f(x) \cdot D^{n+s} g(x)\, dx, \tag{17}$$

gde smo uveli skraćenice:

$$D^\nu \equiv \frac{d^\nu}{dx^\nu}, \quad f(x) \equiv (x^2-1)^m, \quad g(x) \equiv (x^2-1)^n.$$

Posmatrajmo sada integral

$$I_{m+r,\, n+s} \equiv \int_{-1}^{+1} D^{m+r} f(x) \cdot D^{n+s} g(x)\, dx, \tag{18}$$

i pretpostavimo da je $m - r \geqslant n - s$, kako bismo što lakše doveli u vezu rezultate iz ovog paragrafa sa onima dobijenim ranije, u § 3 ovog članka.

Parcijalnom integracijom dobijamo redom ove relacije:

$$I_{m+r,\, n+s} = [D^{m+r-1} f \cdot D^{n+s} g]_{-1}^{+1} - I_{m+r-1,\, n+s+1},$$

$$I_{m+r-1,\, n+s+1} = [D^{m+r-2} f \cdot D^{n+s+1} g]_{-1}^{+1} - I_{m+r-2,\, n+s+2},$$

$$\vdots$$

$$I_{m+r-k,\, n+s+k} = [D^{m+r-k-1} f \cdot D^{n+s+k} g]_{-1}^{+1} - I_{m+r-k-1,\, n+s+k+1},$$

$$\vdots$$

$$I_{m+1,\, n+s+r-1} = [D^m f \cdot D^{n+s+r-1} g]_{-1}^{+1} - I_{m,\, n+s+r}.$$

Iz ovih relacija sleduje

$$I_{m+r,\,n+s} = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \left[D^{m+r-k} f \cdot D^{n+s+k-1} g \right]_{-1}^{+1}, \tag{19}$$

budući da je

$$I_{m,\,n+s+r} \equiv \int_{-1}^{+1} \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m \cdot \frac{d^{n+s+r}}{dx^{n+s+r}} (x^2-1)^n \, dx \equiv 0, \tag{20}$$

ako je

$$m - r \geqq n - s. \tag{21}$$

Zaista, poslednji integral, posle m parcijalnih integracija, postaje

$$(-1)^m \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^m \frac{d^{n+s+r+m}}{dx^{n+s+r+m}} (x^2-1)^n \, dx.$$

Kako je, prema (21),

$$m + s \geqq n + r,$$

biće

$$n + s + r + m \equiv (m+s) + (n+r) \geqq 2(n+r),$$

pa odatle izlazi

$$\frac{d^{n+s+r+m}}{dx^{n+s+r+m}} (x^2-1)^n \equiv 0,$$

budući da je

$$\frac{d^{2n+2r}}{dx^{2n+2r}} (x^2-1)^n \equiv 0.$$

Na osnovu ovoga dolazimo do već navedenog rezultata (20).

7. Izvešćemo sada jednu pomoćnu formulu koja će omogućiti da se $I_{m+r,\,n+s}$ eksplicitno izrazi kao funkcija parametara m, n, r, s.

Uočimo izraz

$$D^{n+s}(x^2-1)^n, \quad \text{tj.} \quad D^{n+s}\{(x+1)^n (x-1)^n\}$$

i izračunajmo njegovu vrednost za $x = 1$ i za $x = -1$.

Primenom *Leibniz*-ove formule dobijamo

$$D^{n+s}\{(x+1)^n (x-1)^n\} \equiv (x+1)^n D^{n+s} (x-1)^n \tag{22}$$

$$+\binom{n+s}{1} D (x+1)^n D^{n+s-1} (x-1)^n + \binom{n+s}{2} D^2 (x+1)^n D^{n+s-2} (x-1)^n + \ldots$$

$$+\binom{n+s}{k} D^k (x+1)^n D^{n+s-k} (x-1)^n + \ldots + (x-1)^n D^{n+s} (x+1)^n.$$

Za $x=1$ svi članovi ovoga izraza jednaki su nuli, osim člana za koji je

$$n+s-k=n, \text{ tj. } k=s.$$

Taj član ima oblik

$$\binom{n+s}{s} D^s (x+1)^n D^n (x-1)^n \tag{23}$$

i za $x=1$ njegova vrednost je

$$2^{n-s} n! \binom{n+s}{s} n(n-1)\ldots(n-s+1),$$

tj.

$$[D^{n+s}(x^2-1)^n]_{x=1} \equiv 2^{n-s} n! \; s! \binom{n+s}{s}\binom{n}{s}. \tag{24}$$

Članovi koji dolaze ispred i iza člana (23) su respektivno

$$\binom{n+s}{s-1} D^{s-1}(x+1)^n D^{n+1}(x-1)^n,$$

$$\binom{n+s}{s+1} D^{s+1}(x+1)^n D^{n-1}(x-1)^n.$$

Za $x=1$ njihova vrednost je nula, a takođe i svih ostalih članova na desnoj strani relacije (22), za istu vrednost $x=1$.

Istim postupkom nalazimo

$$[D^{n+s}(x^2-1)^n]_{x=-1} \equiv (-2)^{n-s} n! \; s! \binom{n+s}{s}\binom{n}{s}, \quad s \geqslant 0. \tag{25}$$

8. Na osnovu formula (24) i (25), formula (19), posle niza izvršenih transformacija, postaje

$$I_{m+r,\,n+s} \equiv [1+(-1)^{m-r+n-s}]\, m! \; n! \; 2^{m-r+n-s+1} \tag{26}$$

$$\times \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1}(r-k)! \; (s+k-1)! \binom{m+r-k}{r-k}\binom{m}{r-k}\binom{n+s+k-1}{s+k-1}\binom{n}{s+k-1}.$$

Analizom formule (26) dolazimo do ovih zaključaka:

1[0] *Ako su izrazi $m-r$ i $n-s$ različite parnosti, tada je*

$$1+(-1)^{m-r+n-s}=0,$$

i stoga

$$I_{m+r,\,n+s}=0;$$

2[0] *Ako su izrazi $m-r$ i $n-s$ iste parnosti, tada je*

$$I_{m+r,\,n+s} \equiv m! \; n! \; 2^{m-r+n-s+2} \tag{27}$$

$$\times \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1}(r-k)! \; (s+k-1)! \binom{m+r-k}{r-k}\binom{m}{r-k}\binom{n+s+k-1}{s+k-1}\binom{n}{s+k-1}.$$

Prema gornjem, imamo ove rezultate:

$$(28)\qquad 1^0 \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx \equiv 0$$

ako je: $m-r \geqslant n-s$ i ako je $(m-r)-(n-s)$ neparno;

$$(29)\qquad 2^0 \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx \equiv$$

$$2^{2-r-s} \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} (r-k)!\,(s+k-1)! \binom{m+r-k}{r-k} \binom{m}{r-k} \binom{n+s+k-1}{s+k-1} \binom{n}{s+k-1}$$

ako je $m-r \geqslant n-s$ i ako je $(m-r)-(n-s)$ parno.

Identitet (29), za $r=s$ i $m=n$, dobija oblik

$$(30)\qquad \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{d^s}{dx^s} P_n(x) \right\}^2 dx \equiv$$

$$2^{2-2s} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} (s-k)!\,(s+k-1)! \binom{n+s-k}{s-k} \binom{n}{s-k} \binom{n+s+k-1}{s+k-1} \binom{n}{s+k-1}.$$

Posle analize izraza što se nalazi na desnoj strani poslednje relac je, dolazi se do činjenice da je ovaj izraz deljiv sledećim proizvodom od $2s$ faktora:

$$(n+s)(n+s-1)(n+s-2)\dots(n-s+1),$$

što se drukčije može napisati:

$$\binom{n+s}{2s} (2s)!$$

9. Upoređujući upotrebljene postupke (videti: §§ 3 i 6 ovog članka) za izračunavanje integrala (1), možemo konstatovati:

1° da se do zaključka da integral (1) ima vrednost nule, ako su $m-r$ i $n-s$ različite parnosti, lakše dolazi polazeći od formula (3) i (4) i koristeći osobinu ortogonalnosti *Legendre*-ovih polinoma, nego kada se za polaznu tačku uzme *Rodrigues*-ova formula (2);

2° da se dolazi do jednostavnijeg izraza za integral (1), kada su razlike $m-r$ i $n-s$ iste parnosti, ako se pođe od *Rodrigues*-ove formule;

3° da se dobija identitet:

$$(31)\qquad \sum_{k=1}^{N} \left\{ \binom{k+s-2}{s-1} \binom{\frac{1}{2}(\overline{m-r}-\overline{n-s})+k+r-2}{r-1} (2n-4k-2s+5) \right.$$

$$\left. \times \prod_{\lambda=2}^{r} (m+n+r-s-2k-2\lambda+5) \prod_{\mu=2}^{s} (2n-2k-2\mu+5) \right\} \equiv$$

$$2^{1-r-s}\sum_{k=1}^{r}\left\{(-1)^{k-1}(r-k)!\,(s+k-1)!\binom{m+r-k}{r-k}\binom{m}{r-k}\binom{n+s+k-1}{s+k-1}\binom{n}{s+k-1}\right\},$$

gde je:

$$m-r\geqslant n-s,\quad (m-r)-(n-s)\ \text{parno},\quad s\geqslant 2,\ r\geqslant 2,$$

$$N=\begin{cases}\dfrac{n-s}{2}+1, & n-s\ \text{parno},\\[2mm] \dfrac{n-s-1}{2}+1, & n-s\ \text{neparno}.\end{cases}$$

10. Na jednom primeru pokazaćemo primenu izvedenih obrazaca. Izračunajmo,

$$J_n\equiv\int_{-1}^{+1}\{P_n''(x)\}^2\,dx.$$

Za n parno, tj. za $n=2\nu$, primenom postupka iz § 3 ovog članka, dobijamo

$$\begin{aligned}(32)\qquad 2J_{2\nu}\equiv{}& 1^2\cdot 2^2\cdot(4\nu-5)(4\nu-1)^2(4\nu-3)^2+\dots\\ &+k^2(k+1)^2(4\nu-4k-1)(4\nu-2k-1)^2(4\nu-2k+1)^2+\dots\\ &+(\nu-1)^2\nu^2\cdot 3\cdot(2\nu+3)^2(2\nu+1)^2.\end{aligned}$$

Na desnoj strani poslednjeg izraza ima ukupno $(\nu-1)$ sabiraka, što je u skladu sa opštim rezultatom, jer je u ovom slučaju

$$N=\frac{n-s-1}{2}+1=\nu-1.$$

Izraz (32) možemo sumirati po sledećoj metodi. Prethodno ćemo sumirati izraz

$$(33)\qquad \sum_{\lambda=1}^{k}\lambda^2(\lambda+1)^2(4\nu-4\lambda-1)(4\nu-2\lambda-1)^2(4\nu-2\lambda+1)^2.$$

Ako zbir (33) označimo sa $\sigma(\nu,k)$ tada je

$$2J_{2\nu}\equiv\sigma(\nu,\nu-1),$$

tj. u $\sigma(\nu,k)$ treba mesto k staviti $\nu-1$.

Zbir (33) je polinom po λ desetog stepena. Koeficijenti tog polinoma su funkcije od ν.

Izračunavanje zbira (33), a zatim (32), elementarne je prirode, ali je ono zametno naročito ako želimo da dobijemo rezultat u jednom podesnom obliku. Taj račun nećemo ovde izvoditi, već upućujemo čitaoca na članke [6] i [7].

Međutim, ako za izračunavanje integrala $J_{2\nu}$ primenimo obrazac (30), imamo

$$16 J_{2\nu} \equiv \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^{k-1} (3-k)!\,(2+k)! \binom{2\nu+3-k}{3-k}\binom{2\nu}{3-k}\binom{2\nu+2+k}{k+2}\binom{2\nu}{k+2}$$

$$\equiv 2!\,3! \binom{2\nu+2}{2}\binom{2\nu}{2}\binom{2\nu+3}{3}\binom{2\nu}{3}$$

$$-1!\,4! \binom{2\nu+1}{1}\binom{2\nu}{1}\binom{2\nu+4}{4}\binom{2\nu}{4}$$

$$+0!\,5! \binom{2\nu}{0}\binom{2\nu}{0}\binom{2\nu+5}{5}\binom{2\nu}{5} \equiv$$

$$\tfrac{1}{15}(2\nu+3)(2\nu+2)(2\nu+1)(2\nu)(2\nu-1)(2\nu-2)(12\nu^4+12\nu^3+7\nu^2+2\nu+30).$$

Prema tome, upoređenjem dobijenih rezultata dolazimo do identiteta

$$\sum_{k=1}^{\nu-1} k^2 (k+1)^2 (4\nu-4k-1)(4\nu-2k-1)^2(4\nu-2k+1)^2$$

$$\equiv 6\binom{2\nu+3}{6}(12\nu^4+12\nu^3+7\nu^2+2\nu+30).$$

Na sličan način dobijamo obrazac za integral

$$\int_{-1}^{+1} \{P'''_{2\nu+1}(x)\}^2\, dx.$$

11. Istim postupkom mogli bismo doći do formule za integrale oblika:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^p}{dx^p} P_l(x) \cdot \frac{d^q}{dx^q} P_m(x) \cdot \frac{d^r}{dx^r} P_n(x)\, dx,$$

ali bi ona bila daleko komplikovanija nego što je formula (9).

Takođe bi bilo interesantno izraziti

$$x^r \frac{d^r}{dx^r} P_n(x) \quad \text{i} \quad x^s \frac{d^r}{dx^r} P_n(x), \qquad (r,\ s \text{ prirodni brojevi}),$$

kao linearnu homogenu kompoziciju *Legendre*-ovih polinoma.

I druge formule slične vrste bile bi od interesa.

Pregledajući litetaruru o ovim polinomima, a naročito važna dela zbirke formula kao što su: [**1**], [**2**], [**5**], [**8**], [**9**], [**10**], [**11**], [**12**], [**13**], [**14**], nismo naišli ni na formulu (9) koju smo ovde izveli, a još manje na formule koje napred predlažemo da se izvedu.

12. Polazeći od *Neumann*-ove formule (3), mogu se izvesti razne nejednakosti za izvode *Legendre*-ovih polinoma.

Tako smo, između ostalog, dokazali ove rezultate:

1^0
$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \leqslant \frac{s!}{2^s}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots\ ;\ s \leqslant n)$$

za $x \varepsilon [-1,\ +1]$;

2^0
$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| < \frac{n^{2s}}{s!}$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots\ ;\ s \leqslant n)$$

za $x \varepsilon [-1,\ +1]$;

3^0
$$\max\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \approx \frac{n^{2s}}{s!\,2^s}$$
$$(n \text{ veliko — prirodan broj}; s << n)$$

za $x \varepsilon [-1,\ +1]$;

4^0
$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \leqslant \frac{(n+s+1)^{2s}}{2^s\, s!}$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots\ ;\ s \leqslant n)$$

za $x \varepsilon [-1,\ +1]$

Detaljne dokaze ovih majorantnih formula dali smo u našoj raspravi [**18**] koja je nedavno objavljena. U ovoj su navedene i nejednakosti koje su izveli *G. Sansone* [**19**], *M. Picone* [**20**] i drugi.

A. A. Markoff i *W. A. Markoff* [**21**], posle upotrebe komplikovanog aparata matematičke analize, dokazali su sledeću teoremu:

Ako u $(a,\ b)$, $a < b$, *polinom* $Q_n(x)$, *stepena* n, *zadovoljava ograničenje*

$$|Q_n(x)| \leqslant M, \quad (M \text{ data pozitivna konstanta}),$$

tada u $(a,\ b)$ *za izvod* $Q_n^{(s)}(x)$, $s \leqslant n$, *važi ograničenje*

$$|Q_n^{(s)}(x)| \leqslant \frac{2^s\, n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots[n^2-(s-1)^2]}{(2s-1)!!}\,\frac{M}{(b-a)^s}.$$

Ova majorantna formula za *Legendre*-ove polinome $P_n(x)$ dobija oblik

$$|P_n^{(s)}(x)| \leqslant \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots[n^2-(s-1)^2]}{(2s-1)!!} \tag{34}$$

za $x \varepsilon [-1,\ +1]$.

Od interesa je da se naše, gore navedene majorantne formule, uporede sa formulom (34).

LITERATURA

[1] R. LAGRANGE:
Polynômes et fonctions de Legendre, Paris, 1939, 82 pages (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 97).

[2] E. W. HOBSON:
The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge, 1931, 500 p.

[3] F. NEUMANN:
Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen, Erste und zweite Abtheilung, Leipzig, 1878, 156 S.

[4] E. T. COPSON:
The theory of functions of a complex variable, London, 1948, 448 p.

[5] E. WHITTAKER—G. N. WATSON:
A course of modern analysis, fourth edition, Cambridge, 1952, 608 p.

[6] D. S. MITRINOVIĆ:
O Stirling-ovim brojevima (Godišen zbornik, Filozofski fakultet na Univerzitetot, Skopje, Prirodno-matematički oddel, knjiga 1, 1948, str. 49—95).

[7] K. MILOŠEVIĆ:
O zbiru jednog rada sa konačnim brojem članova (Posebni izdanija, Filozofski fakultet na Univerzitetot, Skopje, Prirodno-matematički oddel, knjiga 3, 1950, 42 str.).

[8] E. HEINE:
Handbuch der Kugelfunctionen, 2 Aufl., Berlin, Bd. I (1878), 484 S.; Bd. II (1881), 380 S.

[9] W. MAGNUS—F. OBERHETTINGER:
Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2 Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1948, 230 S. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 52).

[10] A. ERDÉLYI—W. MAGNUS—F. OBERHETTINGER—F. TRICOMI:
Higher transcendental functions, New York, Vol. I (1953), 302 pp., vol. II (1953), 396 pp.

[11] G. SZEGÖ:
Orthogonal polynomials, 1939, 401 pp. (American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol, 23)

[12] J. LENSE:
Kugelfunktionen, Leipzig, 1950, 294 S. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 23).

[13] E. P. ADAMS—R. L. HIPPISLEY:
Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions, Washington, 1947, 314 pp. (Smithsonian miscellaneous collections, vol. 74, number 1, publication 2672).

[14] E. KAMKE:
Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Leipzig, Bd. I, 1942, 642 S. (Mathematik und ihre Anwendungen, Bd. 18).

[15] И. М. РЫЖИК—И. С. ГРАДШТЕЙН:
Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. третье, Москва-Ленинград, 1951, 464 стр.

[16] F. G. TRICOMI:
Vorlesungen über Orthogonalreihen, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955, 264 S. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 76).

[17] G. PALAMÀ:
Sui polinomi di Legendre, di Laguerre e di Hermite (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie III, vol. 70, 1937, 45 p.).

[18] D. S. MITRINOVITCH:
Inégalités pour les dérivées des polynômes de Legendre (Bollettino della Unione matematica italiana, serie III, anno XI, 1956, pp. 172—177).

[19] G. SANSONE:
Su una immediata limitazione delle derivate dei polinomi di Legendre (Bollettino della Unione matematica italiana, serie II, anno IV, 1942, pp. 145—147).

[20] M. PICONE:
Una semplicissima formola di maggiorazione per i polinomi di Legendre e per le loro derivate (Bollettino della Unione matematica italiana, serie III, anno VIII, 1953, pp. 1—2).

[21] W. MARKOFF:
Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen (Mathematiche Annalen, Bd. 77, 1915, S. 213—258).

RÉSUMÉ

QUELQUES FORMULES CONCERNANT LES POLYNOMES DE LEGENDRE[1])

Dragoslav S. Mitrinović

1. Dans cet article on établit, entre autres, les formules suivantes relatives aux polynômes $P_n(x)$ de *Legendre*.

$$\text{(I)} \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx \equiv$$

$$2 \sum_{k=1}^{N} \left\{ (2n-2s-4k+5) \binom{k+s-2}{s-1} \binom{\frac{1}{2}(\overline{m-r}-\overline{n-s})+k+r-2}{r-1} \right.$$

$$\left. \times \prod_{\lambda=2}^{r} (m+n+r-s-2k-2\lambda+5) \prod_{\mu=2}^{s} (2n-2\mu-2k+5) \right\},$$

les nombres N, m, n, r, s vérifiant les conditions suivantes:

$1^0 \quad r \geqslant 2, \; s \geqslant 2, \; m-r \geqslant n-s;$

$2^0 \quad (m-r)-(n-s)$ pair;

$$3^0 \quad N = \begin{cases} \dfrac{n-s}{2}+1, & \text{si } n-s \text{ est pair,} \\[2mm] \dfrac{n-s-1}{2}+1, & \text{si } n-s \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx = 0 \text{ pour } (m-r)-(n-s) \text{ impair.}$$

$$\text{(III)} \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{d^r}{dx^r} P_m(x) \cdot \frac{d^s}{dx^s} P_n(x)\, dx \equiv$$

$$2^{2-r-s} \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} (r-k)!\,(s+k-1)! \binom{m+r-k}{r-k} \binom{m}{r-k} \binom{n+s+k-1}{s+k-1} \binom{n}{s+k-1},$$

en dénotant par m, n, r, s, des nombres naturels satisfaisant aux conditions suivantes:

$$m-r \geqslant n-s, \; (m-r)-(n-s) \text{ pair.}$$

$$\text{(IV)} \qquad \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{d^s}{dx^s} P_n(x) \right\}^2 dx \equiv$$

---

[1]) Nous remercions vivement MM. les Professeurs *J. LENSE* (à München) et *A. ERDÉLYI* (à Pasadena, USA) qui ont bien voulu lire le manuscript de ce résumé.

$$2^{2-2s}\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}(s-k)!\,(s+k-1)!\binom{n+s-k}{s-k}\binom{n}{s-k}\binom{n+s+k-1}{s+k-1}\binom{n}{s+k-1}.$$

La dernière formule, présentant un cas particulier de la formule (III), est caractérisée par le fait que l'expression définissant $\int\limits_{-1}^{+1}\left\{\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right\}^2 dx$ est divisible par le produit suivant:

$$(n+s)(n+s-1)(n+s-2)\ldots(n-s+1).$$

2. Dans cet article, on donne aussi les formules pour les cas qui sont mis à part dans la formule (I).

On indique, de même, quelques identités qui mettent en évidence, encore une fois, le fait que la théorie des polynômes de *Legendre* peut servir comme une source d'identités intéressantes, dont la formation se ferait autrement avec assez de difficulté.

3. L'auteur n'a pas rencontré dans la littérature les formules susmentionnées à l'exception de deux cas particuliers quoiqu'il ait feuilleté des traités principaux concernant les fonctions sphériques {*cf.* [**1**], [**2**], [**5**], [**11**], [**12**]}, ainsi que des recueils de formules importants {*cf.* [**9**], [**10**], [**13**], [**15**]}.

Les deux cas particuliers en question sont les suivants:

1⁰ $$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{d}{dx}P_m(x)\cdot\frac{d}{dx}P_n(x)\,dx \equiv \begin{cases} n(n+1), & m \geqslant n,\ m-n \text{ pair} \\ 0, & m-n \text{ impair.}\end{cases}$$

Ce résultat est cité par exemple dans [**5**], p. 309.

2⁰ $$\int\limits_{-1}^{+1}\frac{d^2}{dx^2}P_m(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2}P_n(x)\,dx \equiv$$

$$\frac{1}{24}(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)\,[3m(m+1)-n(n+1)+6],$$

avec $m \geqslant n$ et $m-n$ pair.

Le dernier résultat se trouve dans [**4**], p. 308, ainsi que dans [**5**], p. 309.

4. À la fin de cet article, on indique sans démonstration quelques formules majorantes pour les dérivées des polynômes de *Legendre*, comme par exemple:

$$\left|\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right| \leqslant \frac{s!}{2^s}\binom{n}{s}\binom{n+s}{s}$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots\ ;\ s \leqslant n)$$

pour $x \in [-1,\ +1]$.

Les démonstrations de cette formule ainsi que des autres sont données dans la Note [**18**] de l'auteur, tout récemment publiée.